EEIGM-ENSGSI

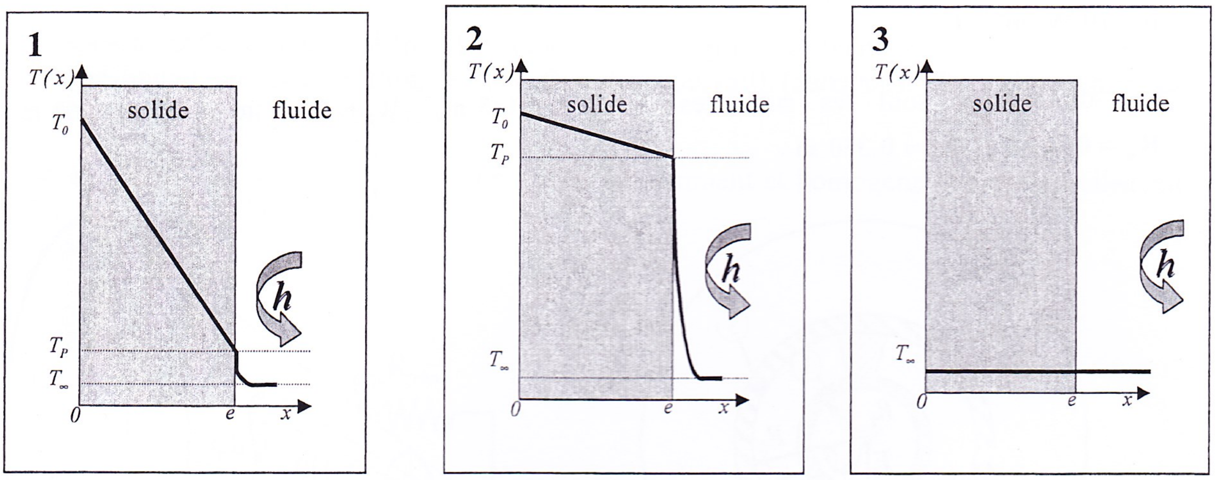
Examen Transferts Thermiques:

Année 2005/2006

Durée : 1h30
Documents non autorisés
Calculatrice autorisée.

EXERCICE 1 : NOMBRE DE BIOT (temps approximatif : 5 minutes)

Dans quel cas le nombre de Biot du système est-il petit (Biot < 0.1) ?
Indiquer le numéro et expliquer/justifier clairement votre choix (en rappelant notamment la définition du nombre de Biot, cela va de soit !)



La réponse juste est le n°2.

Rappelons que le nombre de Biot $\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{h}\ell}{\lambda}$ est un nombre sans dimension mettant en jeu le coefficient d'échange convectif à la paroi, la conductivité thermique de la paroi et une longueur caractéristique du problème, l'épaisseur de la couche solide ℓ ici.

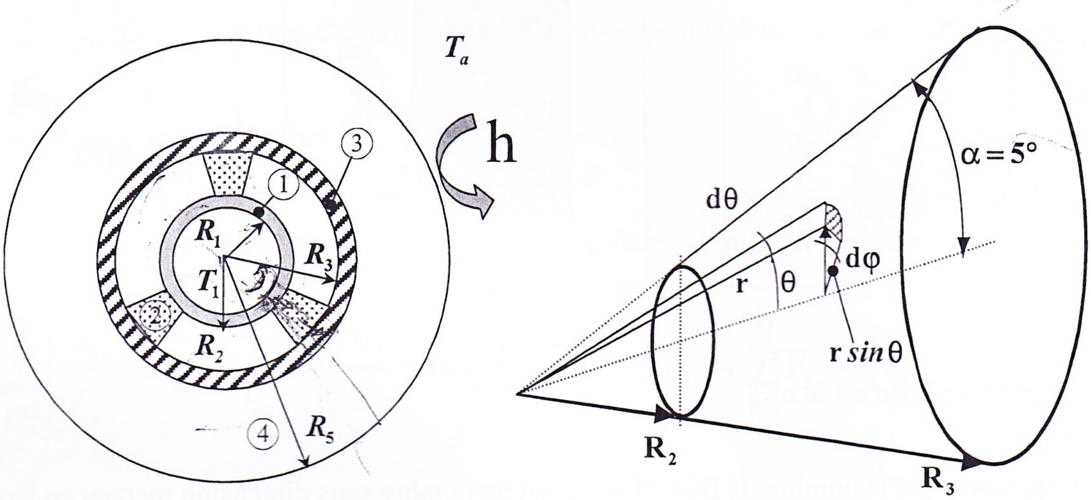
Ce nombre peut exprimer le rapport $\mathbf{B} = \dfrac{\varphi \text{ convectif}}{\varphi \text{ conductif}}$ ou encore $\mathbf{B} = \dfrac{\text{R conductive}}{\text{R convective}} = \dfrac{\ell / \lambda S}{1/hS}$

Un nombre de Biot fort signifie que le phénomène de transport conductif à (dans) la paroi est peu efficace par rapport à la convection (la paroi a donc tendance à être isolante ce qui correspond effectivement à une grande résistance par rapport à la convection. Il y aura donc un grand gradient de température dans la paroi et une faible chute de température à l'interface (Cas n°1)
A l'inverse, un nombre de Biot petit conduit à avoir un mécanisme convectif limitant par rapport à la conduction (donc Résistance au transfert faible de la part de la paroi solide) ce qui se traduire par de faibles gradients de température dans la paroi, et une grosse chute de température à l'interface (Cas n°2)

EXERCICE 2 : ETUDE D'UN CRYOSTAT (temps approximatif : 1 heure)

Le dispositif représenté par le schéma ci-dessous, à symétrie sphérique, est destiné à isoler thermiquement de l'extérieur une cavité initialement remplie d'azote liquide à la température $\mathbf{T_1 = 80\ K}$. Un petit évent, que l'on négligera, impose la pression atmosphérique dans la cavité. Les échanges radiatifs entre les parois métalliques polies ① et ③ sont négligés. Leurs conductivités thermiques sont notées $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_3 = 10\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Dans l'espace intermédiaire, le vide a été réalisé ; trois supports coniques tronqués ② de conductivité $\boldsymbol{\lambda_2 = 0.05\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ y maintiennent l'enceinte intérieure. La deuxième enceinte métallique est entourée d'une couche d'isolant thermique ④ de conductivité $\boldsymbol{\lambda_4 = 0.01\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. La surface externe du dispositif (**r=R₅**) est baignée par l'air ambiant à $\mathbf{T_a = 300\ K}$. On considérera un échange convectif caractérisé par la valeur $\mathbf{h = 10\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$.

Les dimensions sont les suivantes : $\mathbf{R_1 = 0{,}145\ m}$, $\mathbf{R_2 = 0{,}150\ m}$, $\mathbf{R_3 = 0{,}200\ m}$, $\mathbf{R_4 = 0{,}205\ m}$, $\mathbf{R_5 = 0{,}350\ m}$.



1) Grâce à la loi de Fourier, trouver la forme littérale de la résistance d'une paroi sphérique de rayon intérieur $\mathbf{r_{int}}$ et de rayon extérieur $\mathbf{r_{ext}}$.
2) Donner le schéma électrique équivalent du système et donner la forme littérale de la résistance thermique totale associée au dispositif.
3) On donne la résistance thermique des cônes de soutien
$$R_{t_2} = \frac{1}{2\pi\lambda_2(1-\cos\alpha)}\left[\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right]$$
Calculer la valeur de la résistance thermique totale.

4) Calculer le flux thermique $\boldsymbol{\Phi}$ entrant dans la sphère.

5) Question d'honneur : Calculer le temps d'évaporation de la moitié de l'azote. On donne la chaleur latente de vaporisation $\mathbf{L_{vap} = 2 \cdot 10^5\ J \cdot kg^{-1}}$ et la masse volumique de l'azote $\boldsymbol{\rho = 800\ kg \cdot m^{-3}}$.
6) Question Bonus : démontrer la formule donnant la résistance thermique d'un cône de soutien. Le schéma '3D' donne toutes les informations nécessaires pour l'intégration de la surface traversée par le flux.

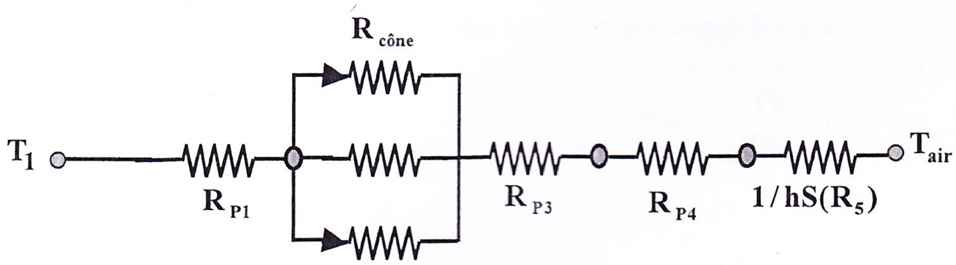
Correction

1) Démonstration analogue au cas du cylindre vu en cours, on trouve :

$\boldsymbol{\Phi = -\lambda\,(4\pi r^2)\,\frac{dT}{dr}}$ formule algébrique ou $\boldsymbol{\Phi}$ est compté positif dans le sens intérieur sphère → extérieur sphère. On écrit qu'en régime permanent, la paroi sphérique constituant un tube de flux, le flux $\boldsymbol{\Phi}$ est conservatif (constant). On intègre entre les rayons int et ext pour aboutir à

$\mathbf{R^{th}_{cond} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_{int}} - \frac{1}{r_{ext}}\right)}$ toujours positif évidemment et homogène dimensionnellement à des K/W.

2)



La résistance totale est donc $\mathbf{R_{totale} = R_{P1} + \frac{R_{cône}}{3} + R_{P3} + R_{P4} + \frac{1}{h\,S(R_5)}}$

3) On trouve $\mathbf{R_{totale} = 480{,}9 \quad K/W}$

4) Le flux est donc de **0,457 W**

5) **Définition du flux**, c'est un débit d'énergie.

En approximation de régime permanent, le temps d'évaporation correspond à l'énergie à apporter pour évaporer la ½ du volume, rapportée au flux entrant soit

$$\mathbf{t = \frac{E}{\Phi} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\right)}{\Phi}\rho L_{vap} = 627\ heures}$$

O.

$// = 0,$

L'équation de la chaleur s'écrit $\Delta T + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$.

Nous considérons un problème ~~transitoire~~ permanent. et sans sources (pas de mention contraire). Donc il suffit d'écrire

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$$

C'est une EDP d'ordre 2 en r et θ. Il nous faut exprimer 4 conditions aux limites du système. Soit

En $r = r_1$, $T(r_1, \theta) = T_f$

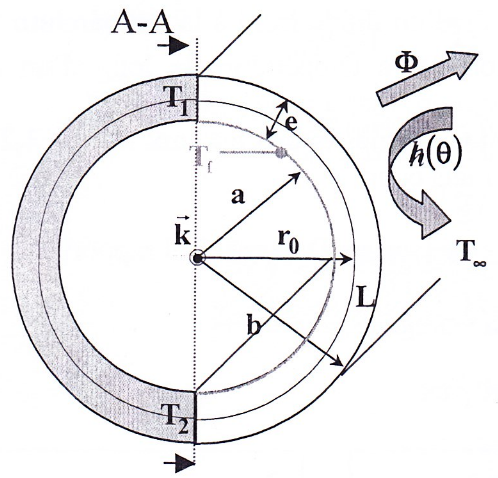
En $r = r_2$, $-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_2} \vec{e}_r = h(\theta)\left(T(r_2) - T_\infty\right)\vec{e}_r$

En $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ainsi qu'en $\theta = +\frac{\pi}{2}$ (choix d'origine de la mesure des angles à partir de $\vec{i}$ horizontal, orienté dans le sens trigonométrique)
On aura une CL permettant « d'écrire » la symétrie soit

$$-\lambda \frac{1}{r}\left.\frac{\partial T}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} \vec{e}_\theta = 0 \quad \text{soit} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = 0$$

EXERCICE 3 : MISE EN EQUATION D'UN PROBLEME DE TRANSFERT CONDUCTIF
(temps approximatif : 25 mn)

On étudie un écoulement de liquide en ébullition dans une conduite cylindrique (longueur ℓ). Le coefficient d'échange interne est très grand en raison de l'ébullition, ce qui fait que l'on peut considérer que le fluide impose sa température T_f à la paroi interne. Par contre la paroi externe est soumise à un échange par convection naturelle et les conditions de l'écoulement autour du cylindre nous obligent à considérer que le coefficient d'échange h varie angulairement (cf dessin)



On cherche à résoudre le champ de température dans ce problème mais du fait de la symétrie A-A (le coefficient d'échange $h(\theta)$ respecte cette symétrie), en raisonnant uniquement sur un demi-cylindre.
Après choix du système de coordonnées du calcul et réflexion sur la dépendance de la température en fonction des variables d'espace (justifier vos choix), écrire le système d'équations permettant de résoudre le problème (en expliquant un minimum !)

On rappelle ci-dessous les formules de calcul différentiel utiles en analyse vectorielle.

Coordonnées cartésiennes (x,y,z)

$$\overrightarrow{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \nabla \cdot \vec{V} = \mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées cylindriques (r,θ,z)

$$\overrightarrow{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \nabla \cdot \vec{V} = \mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Correction

A l'évidence (représentation plane) on se moque d'une dépendance de température selon $\vec{k}$. La température dans le ½ couronne cylindrique varie selon $\mathbf{r}$ et $\boldsymbol{\theta}$ en adoptant le système de coordonnées cylindriques, plus adéquat pour décrire la géométrie de ce problème.